

В 1980 г. ДеДжорджи, Марино и Тоскес ввели понятие «наклона» для функций, определенных на метрическом пространстве и с его помощью определили траектории наискорейшего спуска для таких функций, как 1-липшицевы кривые, у которых метрическая производная почти всюду совпадает с наклоном. В дальнейшем сам ДеДжорджи, Марино, Амброзио и др. доказали существование таких траекторий при некоторых дополнительных предположениях. Обстоятельное изложение полученных к настоящему времени результатов можно найти в монографии L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savare «Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures. Lectures in Mathematics ETH Zurich».

Мы предлагаем новый подход к построению подобных траекторий, который базируется на теории метрической регулярности. Он позволяет получить большинство из упомянутых результатов с меньшими усилиями и используя, как нам кажется, геометрически весьма прозрачную аргументацию. В общем случае полунепрерывной снизу функции удастся доказать существование несколько более медленных траекторий спуска, которые мы назвали траекториями почти максимального наклона.

Эффективность предлагаемого подхода особенно очевидна для функций на евклидовых пространствах. В этом случае для локально липшицевых функций, обладающих хорошими структурными свойствами (скажем, полу-алгебраических или, более общо, определимых в какой-либо о-минимальной структуре – а такие функции типичны в оптимизационной практике) удастся показать, что траектории почти максимального наклона удовлетворяют некоторому эволюционному включению, связанному с предельным субдифференциалом функции.

Ioffe A., Druzvyatskii D., Luis A. ON TRAJECTORIES OF STEEPEST DESCENT FOR NON-SMOOTH FUNCTIONS

The approach to constructing trajectories of almost maximal gradient is considered based on the theory of metric regularity.

Key words: metrical regularity; trajectories of almost maximal gradient.

УДК 517.925

АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО РАСЧЕТА БИФУРКАЦИОННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

© Н.Р. Исанбаева

Ключевые слова: задача трех тел; бифуркация; точки либрации; периодические решения.

Рассматривается плоская эллиптическая ограниченная задача трех тел. Изучается задача о возникновении в окрестности треугольной точки либрации нестационарных периодических колебаний. Приведен алгоритм приближенного расчета бифуркационных значений параметров.

Рассматривается плоская эллиптическая ограниченная задача трех тел [1, 2], которая описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'' - 2y' = \rho(x - \mu + \frac{\mu-1}{(x^2+y^2)^{3/2}}x - \frac{\mu}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}}(x-1)), \\ y'' + 2x' = \rho(y + \frac{\mu-1}{(x^2+y^2)^{3/2}}y - \frac{\mu}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}}y). \end{cases} \quad (1)$$

где $\rho = \frac{1}{1+\varepsilon \cos t}$; $\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$; t – истинная аномалия. Система (1) имеет пять постоянных решений – точек либрации: прямолинейных (L_1, L_2, L_3) и треугольных (L_4, L_5) . Эта система зависит от двух параметров ε и μ .

При определенных значениях $\mu = \mu_q^*$ и $\varepsilon = 0$ треугольные точки либрации являются [1] негиперболическими состояниями равновесия системы (1). В следствии этого система (1) в окрестности треугольных точек либрации при значениях параметров μ и ε , близких к $\mu = \mu_q^*$ и $\varepsilon = 0$ соответственно, может иметь нестационарные $2\pi q$ -периодические решения. Здесь возникает вопрос о том, при каких именно значениях параметров μ и ε возникают указанные решения. В статье этот вопрос обсуждается применительно к точке либрации $L_4(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

На первом этапе предлагается в (1) произвести замену: $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = x', x_4 = y'$. Тогда система (1) примет вид:

$$x' = F(x, \mu, \varepsilon, t), \quad x \in R^4, \quad (2)$$

где

$$F(x, \mu, \varepsilon, t) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ 2x_4 + \rho(x_1 - \mu + \frac{\mu-1}{(x_1^2+x_2^2)^{\frac{3}{2}}}x_1 - \frac{\mu}{((x_1-1)^2+x_2^2)^{\frac{3}{2}}}(x_1-1)) \\ -2x_3 + \rho(x_2 + \frac{\mu-1}{(x_1^2+x_2^2)^{\frac{3}{2}}}x_2 - \frac{\mu}{((x_1-1)^2+x_2^2)^{\frac{3}{2}}}x_2) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Далее, произведя замену $u = x - x^*$, где $x^* = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0)$, перейдем к системе:

$$u' = F(u + x^*, \mu, \varepsilon, t), \quad u \in R^4, \quad (4)$$

При этом в системе (4) точке либрации x^* системы (2) будет соответствовать нулевое состояние равновесия $u = (0, 0, 0, 0)$.

Для построения $2\pi q$ -периодических решений уравнения (4) и соответствующих значений параметров ε и μ применим метод малого параметра в форме:

$$\begin{cases} u(\delta, t) = \delta u_1(t) + \delta^2 u_2(t) + \dots, \\ \varepsilon(\delta) = \delta \varepsilon_1 + \delta^2 \varepsilon_2 + \dots, \\ \mu(\delta) = \mu_q^* + \delta \mu_1 + \delta^2 \mu_2 + \dots \end{cases} \quad (5)$$

где δ – вспомогательный малый параметр, а функции $u_j(t)$ и коэффициенты ε_j и μ_j требуют определения.

Предложен алгоритм, позволяющий определить первые коэффициенты формул (5). Основным утверждением настоящей работы является следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Ряды (5) сходятся при малых $|\delta|$. При этом верны соотношения: $\varepsilon_1 = 0$, $\mu_1 = 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$ и $\mu_2 \neq 0$.*

С л е д с т в и е 1. *Бифуркация $2\pi q$ -периодических решений системы (1) имеет односторонний характер: эти решения возникают только в односторонних окрестностях чисел $\mu = \mu_q^*$ и $\varepsilon = 0$.*

Справедливость теоремы 1 основана на операторном методе исследования двупараметрических задач, полученном в [3]. При этом для чисел ε_2 и μ_2 могут быть получены явные аналитические формулы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркеев А.П. Точки либраций в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.

2. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1978.

3. Юмагулов М.Г., Вышинский А.А., Ибрагимова Л.С., Муртазина С.А. Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах // Уфимский математический журнал. 2010. № 2. С. 3-26.

Isanbaeva N.R. ALGORITHM FOR APPROXIMATE CALCULATION OF BIFURCATION PARAMETER VALUES IN THREE-BODY PROBLEM

A plane elliptic bounded three-body problem is considered. We study the problem occurs in the vicinity of the triangular libration points unsteady periodic oscillations. An algorithm for the approximate calculation of the bifurcation parameter values.

Key words: the tree body-problem; bifurcation; libration points; periodic solutions.

УДК 517.929.4, 519.21

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО И W -МЕТОД Н.В. АЗБЕЛЕВА

© Р.И. Кадиев

Ключевые слова: устойчивость решений; функционально-разностные уравнения Ито; метод вспомогательных или модельных уравнений.

Исследуются вопросы устойчивости решений для линейных функционально-разностных уравнений Ито. Исследование проводится методом вспомогательных или модельных уравнений Н.В.Азбева.

Пусть: $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, P)$ — стохастический базис; k^n — линейное пространство n -мерных $\mathcal{F}_0$ — измеримых случайных величин; $\mathcal{B}_i, i = 2, \dots, m$ — независимые стандартные винеровские процессы; $1 \leq p < \infty$; E — символ математического ожидания; $|\cdot|$ — норма в R^n ; N — множество натуральных чисел; $N_+ = \{0\} \cup N$; d^n — линейное пространство последовательностей $x(s) (s \in N_+)$, где $x(s) \in \mathcal{F}_s$ — измеримая n -мерная случайная величина; l^n — линейное пространство последовательностей $m \times n$ -матриц $H(s) (s \in N_+)$, где элементы матрицы $H(s) \in \mathcal{F}_s$ — измеримые случайные величины.

Рассматривается линейная функционально-разностное уравнение Ито вида

$$x(s+1) = x(s) + [(Vx)(s) + f(s)]Z(s) (s \in N_+), \quad (1)$$

где V является линейным оператором действующий из пространства d^n в пространство l^n , $f \in l^n$, $Z(s) = (h, (\mathcal{B}_2((s+1)h) - \mathcal{B}_2(sh)), \dots, (\mathcal{B}_m((s+1)h) - \mathcal{B}_m(sh)))$, h — достаточно малое действительное число.

Под решением уравнения (1) понимается любой элемент из d^n , удовлетворяющее уравнению (1) P -почти всюду.

Уравнение (1) называют однородным, если $f(s) = 0$ P -почти всюду при $s \in N_+$.

Частными случаями уравнения (1) является *линейная система «обыкновенных» разностных уравнений Ито* и *линейная система разностных уравнений Ито с запаздыванием*.